Dr. Francesco Gallinaro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Tutorat: Max Herwig — Wintersemester 2023/2024

Modelltheorie
Blatt 7
Abgabe: 12.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, welche aus unendlich vielen Konstantenzeichen c_n und aus einem 2-stelligen Relationszeichen besteht, betrachte die $\mathcal{L}$-Theorie T, deren Redukt zu $\{<\}$ die Theorie DLO dichter linearer Ordnungen ist und in deren Modellen $\mathcal{A}$ die Folge $(c_n^{\mathcal{A}})$ streng wachsend ist, das heißt, für jedes n aus $\mathbb{N}$ gilt $c_n^{\mathcal{A}} < c_{n+1}^{\mathcal{A}}$.

a) Zeige, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat.

b) Zeige, dass T bis aus Isomorphie genau drei abzählbare Modelle besitzt. Diese können mit Universum $\mathbb{Q}$ gewählt werden.

HINWEIS: $\lim_{n\to\infty} c_n^{\mathcal{A}}$

Aufgabe 2 (7 Punkte).

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen sowie $A \subset M$ und $A' \subset N$ mit einer elementaren Abbildung $h : A \to A'$.

a) Gegeben b aus M und b' aus N zeige, dass b' den Typ $h(\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A))$ genau dann realisiert, wenn die Fortsetzung $h' = h \cup \{(b, b')\}$ von h elementar ist.

Nun sei $\mathcal{L} = \{E\}$ und $\mathcal{M}$ ein abzählbares Modell der Theorie T aus Aufgabe 2 von Blatt 4 welche besagt, dass $E^{\mathcal{M}}$ eine Äquivalenzrelation mit genau zwei unendlich Klassen ist. Betrachte eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von verschiedenen Elementen aus M derart, dass für alle Indizes $i_0 < \ldots < i_n$ gilt:

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}).$$

b) Zeige, dass das abzählbare Modell $\mathcal{M}$ von T saturiert ist.

c) Zeige, dass für jede solche Folge die Elemente a_n für alle n aus $\mathbb{N}$ in derselben Klasse liegen müssen. Gib (informell) eine mögliche Wahl solcher Elemente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M an.

Aufgabe 3 (7 Punkte).

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $B \subset M$ eine Teilmenge. Betrachte die *Einschränkungsabbildung* auf die erste Variable:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & S_2^{\mathcal{M}}(B) & \to & S_1^{\mathcal{M}}(B). \\ & q(x,y) & \mapsto & \{\varphi[x] \ \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[x] \in q(x,y)\}. \end{array}$$

a) Zeige, dass π wohldefiniert ist.

b) Zeige, dass π surjektiv aber nicht injektiv ist.

(Bitte wenden!)

c) Sei nun $p(x) = \mathrm{tp}(c/B)$ in $S_1^{\mathcal{M}}(B)$ ein realisierter Typ. Zeige, dass die Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} f: & S_1^{\mathcal{M}}(B,c) & \to & \pi^{-1}(p) \subset S_2^{\mathcal{M}}(B) \\ & q(y) & \mapsto & p(x) \cup \{\varphi[x,y] \ \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[c,y] \in q(y)\}. \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 3.33 im Keller des mathematischen Instituts.