

## Modelltheorie

### Blatt 6

Abgabe: 05.12.2023, 12 Uhr

#### Aufgabe 1 (4 Punkte).

In der Sprache  $\mathcal{L}$ , sei  $p(\bar{x})$  ein  $n$ -Typ in der  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$  derart, dass in jedem Modell  $\mathcal{M}$  von  $T$  der Typ  $p(\bar{x})$  nur endlich viele Realisierungen in  $\mathcal{M}$  besitzt.

- Zeige, dass es eine Formel  $\varphi[\bar{x}]$  in  $p(\bar{x})$  so gibt, dass  $T \models \exists^{\leq N} \bar{x} \varphi[\bar{x}]$  für eine natürliche Zahl  $N$ .
- Zeige mit Hilfe einer geeigneten Formel, dass  $p(\bar{x})$  isoliert in  $S_n(T)$  ist, falls  $T$  vollständig ist.

#### Aufgabe 2 (16 Punkte).

In der Sprache  $\mathcal{L} = \{R\}$  mit einem zweistelligen Relationszeichen  $R$  betrachten wir (ungerichtete) Graphen: Indem wir  $R$  als die Kantenrelation zwischen zwei verschiedenen Knoten interpretieren, sind Graphen genau die  $\mathcal{L}$ -Strukturen, in denen  $R$  irreflexiv und symmetrisch ist.

Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph mit folgender Eigenschaft ( $\star$ ):

Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  der Grundmenge (möglicherweise ist  $A$  oder  $B$  leer) gibt es einen Punkt  $c$  derart, dass  $c$  zu allen  $a$  aus  $A$  durch eine Kante verbunden ist und mit keinem  $b$  aus  $B$ .

- Zeige, dass es in einem Zufallsgraph unendlich viele solche Elemente  $c$  geben muss.

**HINWEIS:** Wieso gibt es ein  $c$  wie oben, das nicht in  $B$  liegt?

- Schließe daraus, dass der Graph, der aus einem Zufallsgraph entsteht, wenn ein einzelner Punkt (mit den entsprechenden Kanten) entfernt wird, wiederum ein Zufallsgraph ist.

Sei  $n = \sum_{i=0}^k [n]_i \cdot 2^i$  die binäre Darstellung der natürlichen Zahl  $n$ , wobei  $[n]_i = 0, 1$  für  $0 \leq i \leq k$ . Wir definieren nun die  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{M}$  mit Universum  $\mathbb{N}$  und folgender Interpretation:

$$R^{\mathcal{M}}(n, m) \Leftrightarrow [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

- Zeige, dass  $\mathcal{M}$  ein Zufallsgraph ist.
- Gib mit Hilfe von ( $\star$ ) eine Axiomatisierung  $T$  der Klasse von Zufallsgraphen an und zeige, dass  $T$  vollständig mit Quantorenelimination ist.
- Zeige, dass jeder 1-Typ über einer endlichen Teilmenge eines Zufallsgraphs isoliert ist. Folgere, dass der obige Zufallsgraph  $\mathcal{M}$  ein Primmodell von  $T$  ist, durch Konstruktion einer elementaren Einbettung von  $\mathcal{M}$  in ein beliebiges Modell  $\mathcal{N} \models T$ .

Wie viele abzählbare Zufallsgraphen gibt es (bis auf Isomorphie)?

- Ist  $T$  total transzendent?
- Bestimme die Mächtigkeit des 1-Typenraumes  $S_1^{\mathcal{M}}(M)$ .
- Zeige, dass es für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x, \bar{y}]$  eine Schranke  $N = N_{\varphi[x, \bar{y}]}$  aus  $\mathbb{N}$  so gibt, dass für jedes Tupel  $\bar{b}$  aus  $M$  mit  $X = \varphi[M, \bar{b}] = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[a, \bar{b}]\}$  endlich schon  $|X| \leq N$  gilt.