Dr. Francesco Gallinaro
Tutorat: Max Herwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Modelltheorie
Blatt 5
Abgabe: 28.11.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Betrachte erneut die Abbildung $\operatorname{restr} : S_n^{\mathcal{M}}(B) \to S_n^{\mathcal{M}}(A)$ von Aufgabe 3 auf Blatt 4.

a) Zeige, dass restr surjektiv ist.

b) Ist restr immer injektiv?

Hinweis: $\exists^\infty x$

Aufgabe 2 (9 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L} = \{P_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ besteht genau aus einem einstelligen Prädikat P_s für jede endliche Folge s aus 0en und 1en. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $P_\emptyset^{\mathcal{A}}$ das Grunduniversum A ist. Weiter ist für s aus $2^{<\omega}$ die Menge $P_s^{\mathcal{A}}$ die disjunkte Vereinigung der Teilmengen $P_{s\frown 0}^{\mathcal{A}}$ und $P_{s\frown 1}^{\mathcal{A}}$, welche beide nicht-leer sind.

a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse $\mathcal{K}$ an und zeige, dass T konsistent ist.

Hinweis: Es gibt ein passendes überabzählbares Modell, dessen Elemente Funktionen sind.

b) Zeige, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat.

c) Beschreibe (informell) alle Typen in $S_1(T)$.

d) Zeige, dass kein Typ in $S_1(T)$ isoliert ist.

e) Besitzt T ein Primmodell?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

a) Sei (X, T) ein kompakter unendlicher topologischer Raum. Zeige, dass X mindestens einen nichtisolierten Punkt besitzt.

Betrachte nun die mit Quantorenelimination vollständige Theorie DLO dichter linearer Ordnungen ohne Endpunkte in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$. Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass jeder Typ in $S_n(\mathrm{DLO})$ isoliert ist. Dazu:

b) Sei T eine beliebige $\mathcal{L}$-Theorie und n aus $\mathbb{N}$ derart, dass $S_n(T)$ endlich ist. Zeige, dass jeder Typ p aus $S_n(T)$ isoliert ist.

c) Zeige, dass $S_n(\mathrm{DLO})$ nur endlich viele Typen für jedes n aus $\mathbb{N}$ besitzt.

Bonusfrage Finde eine (möglichst gute) obere Schranke für die Anzahl an Typen in $S_n(\mathrm{DLO})$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 3.33 im Keller des mathematischen Instituts.