Dr. Francesco Gallinaro
Tutorat: Max Herwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Modelltheorie
Blatt 4
Abgabe: 21.11.2022, 12 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte).

Die Kollektion der nach oben unbeschränkten Intervalle $\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist die Basis einer Topologie auf $\mathbb{R}$. Diese Topologie wird T_∞ genannt.

a) Erfüllt die Topologie T_∞ das Trennungsaxiom T_1? Ist sie hausdorffsch?

b) Gibt es isolierte Punkte in T_∞?

c) Beschreibe alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, die offen-abgeschlossen sind. Ist die Topologie 0-dimensional?

d) Besitzt T_∞ eine abzählbare Basis?

e) Ist $\mathbb{R}$ mit dieser Topologie kompakt?

f) Betrachte das Intervall $[0, 1]$. Was sind die Häufungspunkte dieser Menge?

g) Nun betrachte $\mathbb{R}$ zusätzlich als topologischen Raum bezüglich der euklidischen Topologie T_{eukl} (bekannt aus Analysis). Dann sei $f : (\mathbb{R}, T_{eukl}) \to (\mathbb{R}, T_\infty)$ die Abbildung $x \mapsto x$.

   Zeige, dass f stetig, aber weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte). In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen E betrachte die Theorie T welche besagt, dass die Interpretation von E eine Äquivalenzrelation mit genau zwei unendlichen (und keinen endlichen) Klassen ist.

a) Zeige, dass T vollständig mit Quantorenelimination ist (nach Hinzufügen eines Konstantenzeichens).

b) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein abzählbares Modell. Beschreibe (informell) alle 1-Typen über M, d.h. alle Elemente von $S_1^{\mathcal{M}}(M)$.

   Welche Typen sind realisiert? Was sind die isolierten Typen?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subset B \subset M$. Betrachte die Abbildung $\mathrm{restr} : S_n^{\mathcal{M}}(B) \to S_n^{\mathcal{M}}(A)$, welche durch Einschränkung gegeben wird: Für $\bar{a}$ aus A und eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ liegt $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ in $\mathrm{restr}(p)$, falls $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ (als B-Instanz betrachtet) in p liegt.

a) Zeige, dass restr wohldefiniert ist.

b) Zeige, dass die Abbildung restr stetig und abgeschlossen ist.

Verwenden Sie nicht, dass dies für elementare Abbildungen gilt!

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 3.33 im Keller des mathematischen Instituts.