Dr. Francesco Gallinaro
Tutorat: Max Herwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Modelltheorie
Blatt 2
Abgabe: 07.11.2022, 12 Uhr

Aufgabe 1 (13 Punkte).
Die Sprache $\mathcal{L}$ bestehe lediglich aus einem zweistelligen Relationszeichen E. Betrachte nun die Theorie T, welche besagt, dass die Interpretation der Relation E eine Äquivalenzrelation derart ist, dass es für jedes $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ genau eine Äquivalenzklasse der Größe n gibt.

a) Gib eine Axiomatisierung von T an. Zeige, dass T konsistent ist.

b) Zeige, dass T keine Quantorenelimination hat (sogar wenn wir ein neues Konstantenzeichen zu der Sprache hinzufügen).

c) Sei $\mathcal{A} \models T$ ein abzählbares Modell. Zeige mit Löwenheim-Skolem, dass eine elementare Erweiterung $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ der Mächtigkeit Kontinuum ($2^{\aleph_0}$) existiert, die genau $2^{\aleph_0}$ viele Äquivalenzklassen der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat.

   Sind alle Modelle von T der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ isomorph zu $\mathcal{A}'$?

d) Wähle neue Konstantenzeichen $(c_n)_{1\leq n\in\mathbb{N}}$ und betrachte die Erweiterung T_1 von T in der Sprache $\mathcal{L}\cup\{c_n\}_{1\leq n\in\mathbb{N}}$, welche besagt, dass die Äquivalenzklasse (der Interpretation) von c_n genau Größe n hat. Zeige, dass T_1 vollständig mit Quantorenelimination ist.

   Ferner besitzen die Theorien T und T_1 dieselbe Modelle (bis auf Einschränkung der Sprache).

e) Es folgt nun aus der Aufgabe 2 a) vom Blatt 1, dass T_1 modellvollständig ist. Ist T modellvollständig?

   Hinweis Gegeben $\mathcal{B} \models T$, nimm zwei Elemente aus der Klasse mit drei Elementen usw.

Aufgabe 2 (7 Punkte).
In der Ringsprache $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ betrachte den Körper $\mathbb{R}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{R}$ sowie die Formel $\varphi[x_1, x_2] = \exists y(y^2 + x_1 \cdot y + x_2 = 0)$.

a) Zeige, dass φ nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo $\mathrm{Th}(\mathcal{R})$ ist.

   Hinweis: Nach dem Satz von Lindemann gibt es Isomorphismen $\mathbb{Q}[\pi] \cong \mathbb{Q}[T] \cong \mathbb{Q}[-\pi]$, welche $\mathbb{Q}$ punktweise fixieren.

b) Zeige, dass das abgeschlossene Intervall $[0, \sqrt{2}]$ in $\mathcal{R}$ definierbar ist. Welche Parameter werden dafür benötigt?

   Hinweis: Finde zunächst eine Formel $\psi[x_1, x_2]$, welche die Ordnung $<$ definiert.

c) Nun betrachte $\mathbb{R}$ als Struktur $\mathcal{R}'$ in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{<\}$. Finde eine quantorenfreie Formel $\theta[x_1, x_2]$ mit $\mathcal{R}' \models \forall \bar{x}(\varphi[\bar{x}] \leftrightarrow \theta[\bar{x}])$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 3.33 im Keller des mathematischen Instituts.