

Modelltheorie

Blatt 11

Abgabe: 23.01.2024, 12 Uhr

Aufgabe 1 (20 Punkte).

In der Graphensprache $\mathcal{L} = \{R\}$ sei \mathcal{K} die Klasse *freier Pseudoebenen*, d.h. die Klasse aller Graphen \mathcal{A} mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Punkt hat unendlich viele (direkte) Nachbarn.
- Es gibt keine nicht-triviale abgeschlossene Pfade, d.h. es gibt keine Folge (x_0, \dots, x_{n+1}) mit $n \geq 2$, $x_0 = x_{n+1}$, $x_i R x_{i+1}$ für alle $0 \leq i \leq n$ und $x_i \neq x_j$ für all $0 \leq i < j \leq n$.

a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse \mathcal{K} an. Ist \mathcal{K} nicht leer? (Ein Bild genügt).

b) Hat T Quantorenelimination?

Hinweis: Nimm zwei Punkte.

Eine Teilmenge C einer freien Pseudoebene \mathcal{A} heißt *pfad-abgeschlossen (in A)*, wenn je zwei Punkte a und b aus C durch einen Pfad mit Knoten aus C verbunden sind, falls sie durch einen Pfad aus A verbunden waren.

c) Zeige, dass elementare Unterstrukturen einer freien Pseudoebene \mathcal{A} pfad-abgeschlossen in A sind.

d) Sei C pfad-abgeschlossen in der freien Pseudoebene \mathcal{A} und b ein Element aus A . Zeige, dass $C \cup \{b\}$ auch pfad-abgeschlossen ist, wenn es keinen Pfad zwischen b und Elemente aus C gibt.

e) Des Weiteren, falls P ein Pfad zwischen b und dem Element c in der pfad-abgeschlossenen Menge C ist, so ist $C \cup \{x : x \in P\}$ auch pfad-abgeschlossen.

f) Zeige, dass die Kollektion partieller Isomorphismen zwischen pfad-abgeschlossenen endlich erzeugten Unterstrukturen \aleph_0 -saturierter Modelle von T ein nicht-leeres Back-&-Forth System bildet.

g) SchlieÙe daraus, dass T vollständig ist.

h) Sei C pfad-abgeschlossen in \mathcal{A} . Wie groß ist $S_1^A(C)$?

i) Wie sieht allgemein eine ununterscheidbare Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus?

j) Ist die Formel xRa minimal?