Dr. Francesco Gallinaro
Tutorat: Max Herwig

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Modelltheorie

Blatt 0

Abgabe: 24.10.2023, 12 Uhr

Dieses Blatt ist nicht Teil der Studienleistung

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**

a) In der Sprache $\mathcal{L}$ sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine $\mathcal{L}$-Formel der Form

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m],$$

wobei ψ eine quantorfreie $\mathcal{L}$-Formel ist. Gegeben eine Struktur $\mathcal{B}$ sowie Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus der Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

b) Gilt die Rückrichtung?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, welche ein einstelliges Prädikat P_n für jedes n in $\mathbb{N}$ enthält. Betrachte eine $\mathcal{L}$-Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x]$ derart, dass in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T jede Realisierung a von φ in einem der Prädikate $P_n^{\mathcal{A}}$ liegt. Zeige, dass es ein N aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$T \models \forall x \left(\varphi[x] \to \bigvee_{n=0}^{N} P_n(x) \right).$$

Hinweis: Kompaktheitssatz.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Sei I eine (nicht-leere) Menge. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf I ist eine nicht-leere Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $I \in \mathcal{F}$.
2. Für alle X und Y aus $\mathcal{F}$, liegt $X \cap Y$ in $\mathcal{F}$.
3. Falls X in $\mathcal{F}$ liegt und $X \subset Y$, dann liegt Y auch in $\mathcal{F}$.

a) Zeige, dass jeder beliebige Durchschnitt von Filtern wieder ein Filter ist. Ist die Vereinigung von Filtern wiederum ein Filter?

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ist eine *Filterbasis*, falls kein endlicher Durschnitt von Elementen aus $\mathcal{B}$ leer ist. Ein *Ultrafilter* ist ein maximaler Filter.

b) Zeige, dass eine Filterbasis $\mathcal{B}$ einen Filter bestimmt, welcher von $\mathcal{B}$ erzeugt wird.

Falls $\mathcal{B} = \{X\}$ für ein $X \subset I$, wird der von X erzeugte Filter *Hauptfilter* genannt.

(Bitte wenden!)

c) Zeige, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist. Ferner zeige, dass ein Ultrafilter genau dann ein Filter $\mathcal{F}$ ist, wenn er folgende Zusatzeigenschaft besitzt:

   4. Wenn $X \cup Y$ in $\mathcal{F}$ liegt, dann liegt X oder Y in $\mathcal{F}$.

d) Wenn ein Hauptultrafilter $\mathcal{U}$ von der Teilmenge $X \subset I$ erzeugt wird, wie groß ist dann X? Für unendliche I sei $\mathcal{F}(I)$ die Kollektion aller koendlichen Teilmengen von I, das heißt,

$$\mathcal{F}(I) = \{X \subset I : I \setminus X \text{ ist endlich}\}.$$

   Zeige, dass $\mathcal{F}(I)$ ein Filter ist. Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist genau dann kein Hauptfilter, wenn $\mathcal{U}$ den Filter $\mathcal{F}(I)$ enthält.

e) Falls die Menge I Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, zeige, dass ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ genau dann unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter ist.

f) Gegeben einen Filter $\mathcal{F}$ auf I und eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von (nicht-leeren) Mengen, definiere folgende Relation auf $\prod_{i\in I} X_i$:

$$(a_i)_{i\in I} \sim_{\mathcal{F}} (b_i)_{i\in I} \quad \Longleftrightarrow \quad \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{F}.$$

   Zeige, dass $\sim_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 3.33 im Keller des mathematischen Instituts.